

ĐỀ CƯƠNG HỌC KÌ II MÔN TOÁN 8**NĂM HỌC 2023– 2024****II. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM****1. Đại số**

- Chương 6. Phân thức đại số
- Chương 7. Phương trình bậc nhất và hàm số bậc nhất
- Chương 8. Mở đầu tính xác suất của biến cố

2. Hình học

- Chương 9. Tam giác đồng dạng
- Chương 10. Một số khối hình học thực tiễn

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị của x để phân thức $\frac{x-3}{8}$ có giá trị bằng 0 là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. -1.

Câu 2. Kết quả phép tính $\frac{5x+y}{3y} + \frac{2x-y}{3y}$ là

- A. $\frac{7x}{6y}$. B. $\frac{7x-2y}{3y}$. C. $\frac{7x+2y}{3y}$. D. $\frac{7x}{3y}$.

Câu 3. Phương trình nào sau đây **không** là phương trình bậc nhất một ẩn?

- A. $2x-5=0$. B. $\frac{1}{x^2}+1=0$. C. $4x-3=0$. D. $\frac{1}{3}x+2=0$.

Câu 4. Cho đường thẳng $y=ax+b$. Với giá trị a thỏa mãn điều kiện nào sau đây thì góc tạo bởi đường thẳng đó với trục Ox là góc nhọn?

- A. $a < 0$. B. $a = 0$. C. $a > 0$. D. $a \neq 0$.

Câu 5. Đồ thị của hai hàm số $y=2024x+1$ và $y=2025x+1$ là hai đường thẳng có vị trí như thế nào?

- A. Trùng nhau. B. Song song. C. Cắt nhau. D. Không cắt nhau.

Câu 6. Một hộp có 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt: 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một thẻ từ hộp, kết quả thuận lợi cho biến cố “Số ghi trên thẻ chia hết cho 2” là

- A. Thẻ ghi số 2 và thẻ ghi số 3. B. Thẻ ghi số 2 và thẻ ghi số 4.
C. Thẻ ghi số 2 và thẻ ghi số 5. D. Thẻ ghi số 3 và thẻ ghi số 4.

Bài 7. Lớp 8C có 38 bạn, trong đó có 17 nữ. Cô giáo chọn ngẫu nhiên một bạn làm sao đỏ. Xác suất cô chọn trúng một bạn nam là

- A. $\frac{17}{38}$. B. $\frac{13}{38}$. C. $\frac{11}{38}$. D. $\frac{21}{38}$.

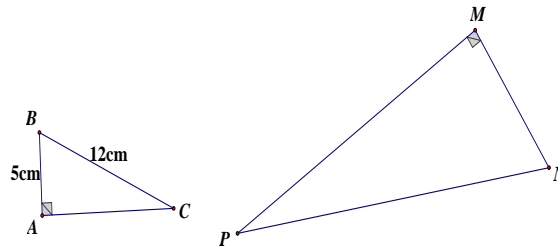
Câu 8. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP theo tỉ số 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $MN = 2AB$. B. $AC = 2NP$. C. $MP = 2BC$. D. $BC = 2NP$.

Câu 9. Nhận xét nào sau đây là đúng?

- A. Trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất.
 B. Trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh bé nhất.
 C. Trong tam giác vuông, cạnh góc vuông bằng cạnh huyền.
 D. Trong tam giác vuông, cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền.

Câu 10. Cho hình vẽ, biết $\triangle ABC \sim \triangle MNP$. Tỉ số $\frac{MN}{NP}$ bằng



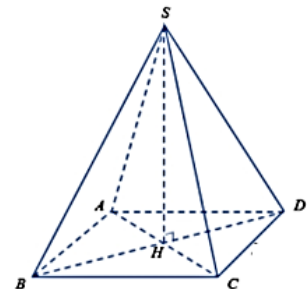
- A. $\frac{13}{5}$. B. $\frac{5}{13}$. C. $\frac{12}{5}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.MNP$, đỉnh của hình chóp là

- A. S . B. M . C. N . D. P .

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (hình bên), khi đó SH được gọi là

- A. đường cao. B. cạnh bên.
 C. cạnh đáy. D. đường chéo.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1: BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{15-x}{x^2-25} + \frac{2}{x+5} \right) : \frac{x+1}{2x^2-10x}$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=1$.
 c) Chứng tỏ $P = 2 + \frac{-2}{x+1}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của P và rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P tại $x = 0$.

c) Chứng minh $P = 1 - \frac{2}{x-2}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P và rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P tại $x = 2$.

c) Xét biểu thức $S = P \cdot \frac{2}{x-2}$. Chứng minh $S = 1 + \frac{1}{x-2}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức S nhận giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức $C = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$.

a) Rút gọn biểu thức C .

b) Tính giá trị của biểu thức C tại $x = 0$.

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức C nhận giá trị nguyên.

DẠNG 2: HÀM SỐ VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Bài 5. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x + 3$;

b) $y = 2x - 5$;

c) $y = -1,5x$.

Bài 6.

a) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(1; 2)$ và có hệ số góc là 2 .

b) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng có hệ số góc là -3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 .

c) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -2x + 2$ và đi qua điểm $(3; 4)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = (m - 1)x + 2 (m \neq 1)$

a) Tìm m để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = x + 4$.

b) Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m tìm được ở câu a.

c) Tìm giao điểm A của đồ thị hàm số tìm được ở câu a và đồ thị của hàm số $y = -x - 4$. Tính diện tích của tam giác OAB , với B là giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x - 4$ với trục Ox .

DẠNG 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH.

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $8x - 5 = 2x + 13$;

b) $6x - 4 + x = 3.(x + 4)$;

c) $3x - (5 - 2x) = 4(x + 1) - 10$;

d) $3.(x - 4) - (x + 5) = 6x - (5 + 2x)$.

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4x - 5}{3} = \frac{1 + 3x}{2}$;

b) $\frac{10x + 3}{12} - 1 = \frac{6x + 8}{9}$;

c) $\frac{7x - 1}{6} + 2x = \frac{16 - x}{5}$;

d) $\frac{7 - 3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x - 2) + \frac{5.(5 - 2x)}{6}$.

DẠNG 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bài 10. Hai ô tô cùng xuất phát từ Hà Nội đi Hải Phòng lúc 7 giờ sáng, trên cùng một tuyến đường. Xe đi thứ nhất đến Hải Phòng lúc 9 giờ 40 phút, trước xe còn lại 20 phút. Tính vận tốc trung bình của mỗi ô tô, biết mỗi giờ xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 5 km.

Bài 11. Lúc 8 giờ sáng, ông An đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B theo lộ trình dài 134 km. Cùng lúc đó, ông Bắc đi xe máy từ B đến A cũng theo lộ trình như ông An, hai người gặp nhau lúc 10 giờ sáng cùng ngày. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng vận tốc xe ông An hơn vận tốc xe ông Bắc 5 km/h.

Bài 12. Bạn Hoàng đi nhà sách và chọn mua được hai cuốn sách có giá bìa chênh nhau 15 000 đồng. Khi thanh toán, do được giảm giá 20% mỗi cuốn nên Hoàng chỉ phải trả 84 000 đồng cho cô thu ngân. Hỏi giá bìa của mỗi cuốn sách là bao nhiêu?

Bài 13. Cuối tuần vừa rồi, gia đình bạn Trang gồm bốn người đi ăn buffet lẩu tại một nhà hàng. Nhà hàng này đang thực hiện chương trình giảm giá "Đi bốn tính tiền ba", nghĩa là nếu có 4 người khách cùng đặt một bàn ăn thì chỉ tính tiền 3 khách. Ngoài ra, mẹ Trang còn có thẻ thành viên nên được giảm giá thêm 5% trên tổng hóa đơn. Do đó, số tiền thanh toán cho bữa ăn của gia đình Trang là 826 500 đồng. Hỏi giá tiền ăn buffet cho một người là bao nhiêu?

Bài 14. Trong quý I, hai tổ công nhân sản xuất được 1550 sản phẩm. Sang quý II, tổ Một sản xuất vượt mức 15%, tổ Hai vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 1815 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ sản xuất được trong quý I.

Bài 15. Tại một xưởng làm bánh, trong tuần thứ nhất, hai tổ sản xuất được 900 thùng bánh. Sang tuần thứ hai, tổ I làm vượt mức 25%, nhưng tổ II chỉ đạt 95% nên cả hai tổ sản xuất 975 thùng bánh. Hỏi trong tuần thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu thùng bánh?

DẠNG 5. ƯỚC LƯỢNG MỘT XÁC SUẤT BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM.

Bài 16. Một túi đựng các quả cầu có kích cỡ giống nhau, khác nhau về màu, trong đó có 25 quả màu đỏ, 40 quả màu tím, 12 quả màu vàng, 10 quả màu trắng và 15 quả màu đen. Lấy

ngẫu nhiên một quả cầu trong túi. Tính xác suất để:

- Lấy được quả màu đỏ;
- Lấy được quả màu tím hoặc vàng;
- Lấy được quả không phải màu đen.

Bài 17. Trong một nhóm đi cắm trại có 16 học sinh lớp 8A (10 nam, 6 nữ) và 14 học sinh lớp 8B (7 nam, 7 nữ). Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất của các biến cố sau:

- A: "Chọn được học sinh nữ";
- B: "Chọn được học sinh nam lớp 8A";
- C: "Chọn được học sinh nữ lớp 8B".

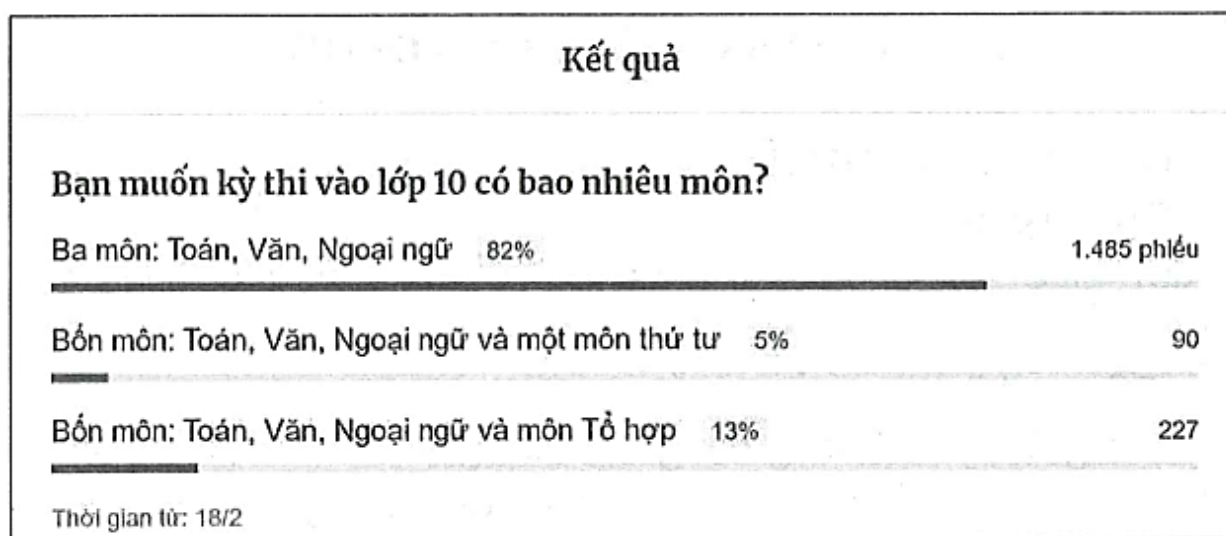
Bài 18. Chọn một số có hai chữ số, tính xác suất của các biến cố sau:

- Số được chọn chứa chữ số 5 ;
- Số được chọn có hai chữ số giống nhau;
- Số được chọn lớn hơn 70;
- Số được chọn không chứa chữ số 3.

Bài 19. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc, tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc từ 10 trở lên;
- Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc chia hết cho 3;
- Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là một số nguyên tố;
- Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc lớn hơn 4.

Bài 20. Liên quan đến kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 tại thành phố Hà Nội, Vnexpress.net đã lấy ý kiến độc giả và thu được kết quả như sau:



- Tính xác suất biến cố người cho ý kiến thi 4 môn.

b) Theo thống kê của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, tính đến học kỳ II năm học 2021-2022, toàn thành phố có 659 trường trung học cơ sở với hơn 522.000 học sinh. Hãy ước tính số học sinh cho ý kiến thi 3 môn trong đợt thi tuyển sinh vào 10 dựa vào tỉ lệ trên.

Bài 21. Thống kê số vụ tai nạn giao thông của tháng 9 của một thành phố A thu được kết quả như bảng sau:

Số vụ tai nạn giao thông trong 1 ngày	0	1	2	3	4	> 4
Số ngày	4	7	9	6	2	2

a) Tính xác suất biến cố một ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn.

b) Tính xác suất một ngày có nhiều hơn 3 vụ tai nạn.

c) Hãy dự đoán xem trong 3 tháng 10, 11, 12 tại thành phố A:

- Có bao nhiêu ngày có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông?

- Có bao nhiêu ngày không xảy ra tai nạn giao thông?

DẠNG 6. HÌNH HỌC TỔNG HỢP.

Bài 22. Cho tam giác nhọn ABC . Kẻ các đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $AE.AC = AF.AB$ và $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M , AH cắt BC tại D .

Chứng minh $BD^2 = AD.DM$.

c) Cho $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và kẻ AK vuông góc với EF tại K . Tính tỉ số $\frac{S_{AFH}}{S_{AKE}}$.

d) Chứng minh $AB.AC = BE.CF + AE.AF$.

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 12 cm. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = 3$ cm. Đường thẳng DE cắt CB kéo dài tại K .

a) Tính DE .

b) Chứng minh $\triangle EAD \sim \triangle EBK$; từ đó tính DK .

c) Chứng minh $AD^2 = KC.AE$.

d) Tính diện tích tam giác CDK .

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

Gọi M và N theo thứ tự là hình chiếu của E và D trên BC .

a) Chứng minh tỉ số khoảng cách từ H đến EM và DN bằng $\frac{EM}{DN}$.

b) Gọi O là giao điểm của DM và EN . Chứng minh HO vuông góc với BC .

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc cạnh BC).

a) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D , vẽ AE vuông góc với BD tại E . Chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle DAB$.

b) Chứng minh $BE \cdot BD = BH \cdot BC$.

c) Chứng minh $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.

Bài 26. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và D sao cho

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$$

a) Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

b) Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle ABC$;

c) Gọi I là giao điểm của BD và EC . Chứng minh $ID \cdot IB = IE \cdot IC$.

Bài 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Kẻ AI vuông góc với BD tại I và AI cắt DC tại E . Chứng minh:

a) $AD^2 = DI \cdot DB$; b) $BI = 4DI$;

Bài 28. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AE và DE .

Chứng minh rằng:

a) $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{DE}$; b) $\triangle AND \sim \triangle DPC$;

Bài 29. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có hai đường chéo vuông góc với nhau tại O và $AB = 4$ cm, $CD = 9$ cm.

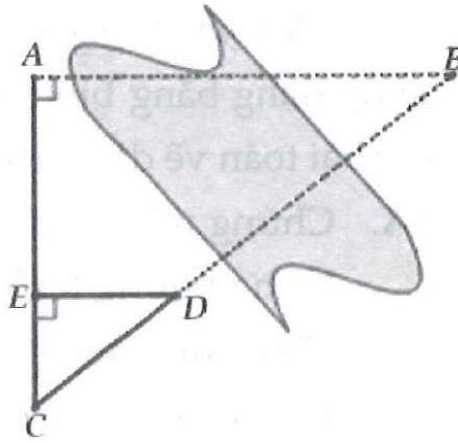
a) Chứng minh $\triangle AOB \sim \triangle DAB$;

b) Tính độ dài AD ;

c) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$

d) Tính tỉ số $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}$.

Bài 40. Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B (không thể đo trực tiếp), người ta xác định các điểm C, D, E như hình vẽ. Sau đó đo được khoảng cách giữa A và C là $AC = 9$ m, khoảng cách giữa C và E là $EC = 3$ m; khoảng cách giữa E và D là $DE = 4$ m. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .



DẠNG 7. MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO

Bài 40. Giải phương trình: Giải phương trình : $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 8x + 32} = \frac{1}{x^2 - 2x + 8}$

Bài 41. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài 42. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}$.

Bài 44. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$.

Bài 45. Cho hai số $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{y}\right)^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	D	B	C	C	B	D	D	D	D	A	A

BÀI TẬP TỰ LUẬN

PHÂN ĐẠI SỐ

DẠNG 1: BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{15 - x}{x^2 - 25} + \frac{2}{x + 5}\right) : \frac{x + 1}{2x^2 - 10x}$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=1$.

c) Chứng tỏ $P = 2 + \frac{-2}{x+1}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Gợi ý

a) $P = \frac{2x}{x+1}$. b) Tại $x=1$, ta có: $P = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$.

c) $P = \frac{2x}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{-2}{x+1} = 2 + \frac{-2}{x+1}$.

Với x là số nguyên, để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{-2}{x+1} \in \mathbb{Z}$.

$$\Leftrightarrow -2 : (x+1) \Leftrightarrow x+1 \in U(-2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; -2; 1; -3\}.$$

Bài 2. Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P và rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P tại $x=0$.

c) Chứng minh $P = 1 - \frac{2}{x-2}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

Gợi ý

a) ĐKXD của P là $x \neq 2; x \neq -3$. Rút gọn biểu thức P :

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x} = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x-2)(x+3)} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2) - 5 - (x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x^2 - x - 12}{(x-2)(x+3)} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-4}{x-2}. \end{aligned}$$

b) Tại $x=0$ thì $P = \frac{0-4}{0-2} = 2$.

c) Ta có: $P = \frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2-2}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} - \frac{2}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$.

Để P có giá trị nguyên thì $\frac{2}{x-2}$ có giá trị nguyên.

$$\Rightarrow 2 : (x-2) \Rightarrow x-2 \in U(2) = \{1; -1; 2; -2\} \Rightarrow x \in \{3; 1; 4; 0\}.$$

Bài 3. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}$.

- Tìm điều kiện xác định của P và rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của P tại $x = 2$.
- Xét biểu thức $S = P \cdot \frac{2}{x - 2}$. Chứng minh $S = 1 + \frac{1}{x - 2}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức S nhận giá trị nguyên.

Gợi ý

- ĐKXĐ của P là $x \neq 0; x \neq -5$ và $P = \frac{x - 1}{2}$.
- Tại $x = 2$ thì $P = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- $S = \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{x - 2 + 1}{x - 2} = 1 + \frac{1}{x - 2}$.
Để biểu thức S nhận giá trị nguyên thì $x \in \{3; 1\}$.

Bài 4. Cho biểu thức $C = \frac{x + 2}{x + 3} - \frac{5}{x^2 + x - 6} + \frac{1}{2 - x}$.

- Rút gọn biểu thức C .
- Tính giá trị của biểu thức C tại $x = 0$.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức C nhận giá trị nguyên.

Gợi ý

- $C = \frac{x - 4}{x - 2}$.
- Tại $x = 0$ thì $C = 2$.
- $x \in \{3; 1; 0; 4\}$.

DẠNG 2: HÀM SỐ VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Bài 5. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

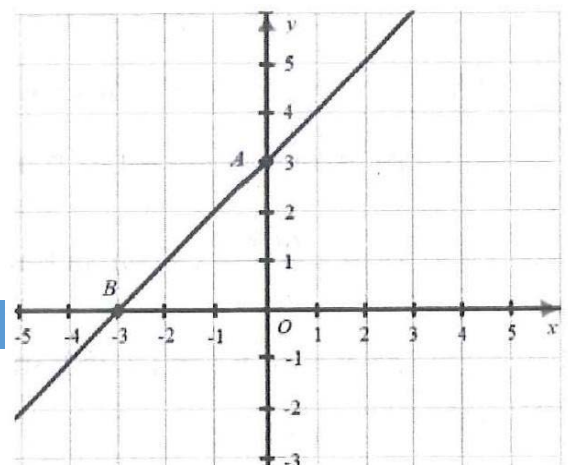
- $y = x + 3$;
- $y = 2x - 5$;
- $y = -1,5x$.

Gợi ý

- $y = x + 3$

Cho $x = 0$ thì $y = 3$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Oy là $A(0; 3)$

Cho $y = 0$ thì $x = -3$, ta được giao điểm của đồ thị



với trục Ox là $B(-3;0)$

Vậy đồ thị hàm số $y = x + 3$ là đường thẳng AB .

b) Tương tự, đồ thị hàm số $y = 2x - 5$ là đường thẳng CD , trong đó $C(0; -5); D(2; -1)$

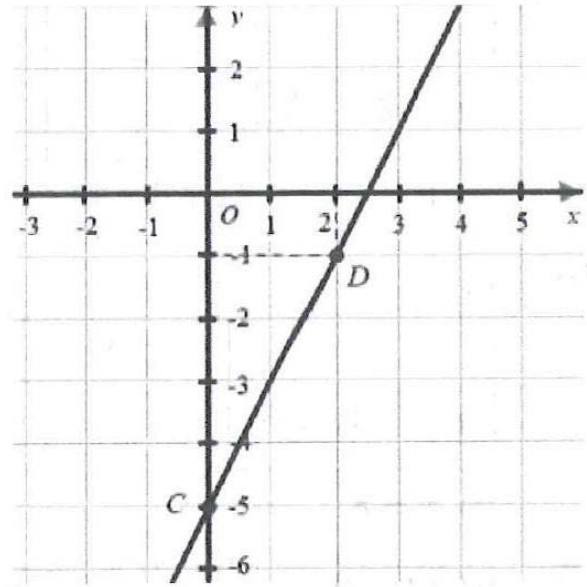
c) Đồ thị hàm số $y = -1,5x$ là đường thẳng OE , trong đó $O(0;0); E(2; -3)$. HS tự vẽ hình.

Bài 6.

a) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(1; 2)$ và có hệ số góc là 2 .

b) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng có hệ số góc là -3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 .

c) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -2x + 2$ và đi qua điểm $(3; 4)$.



Gợi ý

a) Hàm số bậc nhất cần tìm có dạng $y = 2x + b$ đi qua điểm $(1; 2)$ nên $x = 1; y = 2$ hay:

$$2 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = 2x.$$

b) Hàm số bậc nhất có dạng $y = -3x + b$

cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 hay đi qua điểm $(2; 0)$ nên thay $x = 2; y = 0$ vào

$$0 = -3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 6 \text{ ta được } \Rightarrow y = -3x + 6.$$

c) Hàm số cần tìm có dạng $y = -2x + b$ đi qua điểm $(3; 4)$ nên $x = 3; y = 4$ thay vào $y = -2x + b$

ta được: $4 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 10 \Rightarrow y = -2x + 10$.

Bài 7. Cho hàm số $y = (m-1)x + 2 (m \neq 1)$

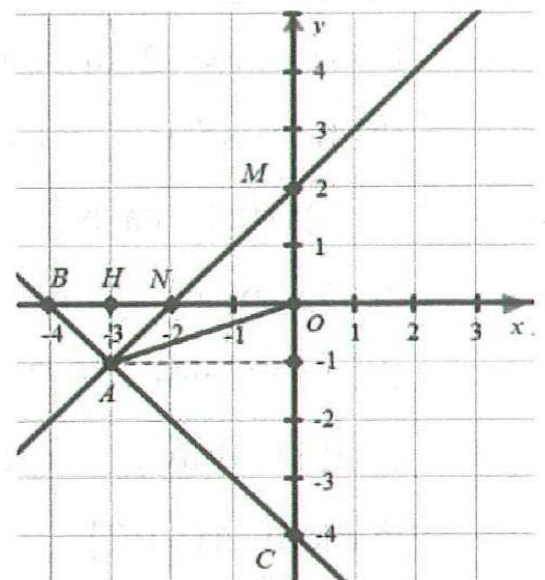
a) Tìm m để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = x + 4$.

b) Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m tìm được ở câu a.

c) Tìm giao điểm A của đồ thị hàm số tìm được ở câu a và đồ thị của hàm số $y = -x - 4$. Tính diện tích của tam giác OAB , với B là giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x - 4$ với trục Ox .

Gợi ý

a) Để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = x + 4$



thì $m-1=1$ và $2 \neq 4$ (luôn đúng). Suy ra $m=2$.

b) Với $m=2$ ta có hàm số $y=x+2$ Cho $x=0$ thì $y=2$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Oy là $M(0;2)$.

Cho $y=0$ thì $x=-2$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Ox là $N(-2;0)$ Vậy đồ thị hàm số $y=x+2$ là đường thẳng MN.

c) Xét hàm số $y=-x-4$ Cho $x=0$ thì $y=-4$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Oy là $C(0;-4)$. Cho $y=0$ thì $x=-4$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Ox là $B(-4;0)$. Vậy đồ thị hàm số $y=-x-4$ là đường thẳng BC.

Dựa vào đồ thị ta thấy giao điểm của hai đồ thị là $A(-3;-1)$.

+ Kẻ $AH \perp Ox$ tại H . Do $A(-3;-1)$ nên $AH = |-1| = 1$ (đơn vị độ dài)

+ $B(-4;0) \Rightarrow OB = |-4| = 4$ (đơn vị độ dài).

+ $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$ (đơn vị diện tích)

DẠNG 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $8x - 5 = 2x + 13;$

b) $6x - 4 + x = 3 \cdot (x + 4);$

c) $3x - (5 - 2x) = 4(x + 1) - 10;$

d) $3 \cdot (x - 4) - (x + 5) = 6x - (5 + 2x).$

Gợi ý

a) $8x - 5 = 2x + 13$

$8x - 2x = 13 + 5$

$6x = 18$

$x = 3$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

c) $3x - (5 - 2x) = 4(x + 1) - 10$

$3x - 5 + 2x = 4x + 4 - 10$

$3x + 2x - 4x = 4 - 10 + 5$

$x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

b) $6x - 4 + x = 3 \cdot (x + 4)$

$6x - 4 + x = 3x + 12$

$6x + x - 3x = 12 + 4$

$4x = 16$

$x = 4$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 4$.

d) $3 \cdot (x - 4) - (x + 5) = 6x - (5 + 2x)$

$3x - 12 - x - 5 = 6x - 5 - 2x$

$3x - x - 6x + 2x = -5 + 12 + 5$

$-2x = 12$

$x = -6$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -6$.

Bài 9. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{4x-5}{3} = \frac{1+3x}{2};$$

$$b) \frac{10x+3}{12} - 1 = \frac{6x+8}{9};$$

$$c) \frac{7x-1}{6} + 2x = \frac{16-x}{5};$$

$$d) \frac{7-3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x-2) + \frac{5 \cdot (5-2x)}{6}.$$

Gợi ý

$$a) \frac{4x-5}{3} = \frac{1+3x}{2}$$

$$b) \frac{10x+3}{12} - 1 = \frac{6x+8}{9}$$

$$\frac{2(4x-5)}{6} = \frac{3 \cdot (1+3x)}{6}$$

$$\frac{3 \cdot (10x+3) - 36}{36} = \frac{4 \cdot (6x+8)}{36}$$

$$2 \cdot (4x-5) = 3 \cdot (1+3x)$$

$$3 \cdot (10x+3) - 36 = 4 \cdot (6x+8)$$

$$8x - 10 = 3 + 9x$$

$$30x + 9 - 36 = 24x + 32$$

$$9x - 8x = -10 - 3$$

$$30x - 24x = 32 - 9 + 36$$

$$x = -13$$

$$6x = 59$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -13$.

$$x = \frac{59}{6}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{59}{6}$.

$$c) \frac{7x-1}{6} + 2x = \frac{16-x}{5}$$

$$d) \frac{7-3x}{12} + \frac{3}{4} = 2(x-2) + \frac{5 \cdot (5-2x)}{6}$$

$$\frac{5 \cdot (7x-1)}{30} + \frac{60x}{30} = \frac{6 \cdot (16-x)}{30}$$

$$\frac{7-3x}{12} + \frac{9}{12} = \frac{24(x-2)}{12} + \frac{10(5-2x)}{12}$$

$$5 \cdot (7x-1) + 60x = 6 \cdot (16-x)$$

$$7-3x+9 = 24 \cdot (x-2) + 10(5-2x)$$

$$35x - 5 + 60x = 96 - 6x$$

$$7-3x+9 = 24x - 48 + 50 - 20x$$

$$35x + 60x + 6x = 96 + 5$$

$$-3x - 24x + 20x = -48 + 50 - 7 - 9$$

$$101x = 101$$

$$-7x = -14$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = 2$.

DẠNG 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bài 10. Hai ô tô cùng xuất phát từ Hà Nội đi Hải Phòng lúc 7 giờ sáng, trên cùng một tuyến đường. Xe đi thứ nhất đến Hải Phòng lúc 9 giờ 40 phút, trước xe còn lại 20 phút. Tính vận tốc trung bình của mỗi ô tô, biết mỗi giờ xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 5 km.

Gợi ý

Thời gian ô tô thứ nhất đi từ Hà Nội đến Hải Phòng là:

$$9 \text{ giờ } 40 \text{ phút} - 7 \text{ giờ} = 2 \text{ giờ } 40 \text{ phút} = \frac{8}{3} (\text{ h})$$

Thời gian ô tô thứ hai đi từ Hà Nội đến Hải Phòng là: $2 \text{ giờ } 40 \text{ phút} + 20 \text{ phút} = 3 \text{ giờ}$

Gọi vận tốc trung bình của ô tô thứ hai là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc trung bình của ô tô thứ hai là $x + 5$ (km/h)

Vì quãng đường di chuyển của hai ô tô như nhau nên ta có phương trình: $\frac{8}{3} \cdot (x + 5) = 3x$.

Giải phương trình được $x = 40$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vận tốc trung bình của ô tô thứ hai là 40 km/h và của ô tô thứ nhất là $40 + 5 = 45$ (km/h)

Bài 11. Lúc 8 giờ sáng, ông An đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B theo lộ trình dài 134 km. Cùng lúc đó, ông Bắc đi xe máy từ B đến A cũng theo lộ trình như ông An, hai người gặp nhau lúc 10 giờ sáng cùng ngày. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng vận tốc xe ông An hơn vận tốc xe ông Bắc 5 km/h.

Gợi ý

Thời gian kể từ khi hai xe di chuyển cho đến khi gặp nhau là: $10 - 8 = 2$ giờ

Gọi vận tốc xe của ông Bắc là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc xe của ông An là: $x + 5$ (km/h)

Vì đến khi gặp nhau tổng quãng đường đi được của hai người bằng quãng đường AB nên ta có phương trình $2(x + 5) + 2x = 134$

Giải phương trình được $x = 31$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vận tốc của người đi từ B là 31 km/h và của người đi từ A là $31 + 5 = 36$ (km/h).

Bài 12. Bạn Hoàng đi nhà sách và chọn mua được hai cuốn sách có giá bìa chênh nhau 15 000 đồng. Khi thanh toán, do được giảm giá 20% mỗi cuốn nên Hoàng chỉ phải trả 84 000 đồng cho cô thu ngân. Hỏi giá bìa của mỗi cuốn sách là bao nhiêu?

Gợi ý

Gọi giá bìa của cuốn sách rẻ hơn là x (đồng) ($x > 0$)

Giá bìa của cuốn sách đắt hơn là: $x + 15000$ (đồng)

Vì được giảm giá 20% nên giá phải trả bằng 80% giá bìa.

Ta có phương trình: $80\%(x + x + 15000) = 84000$

Giải phương trình được $x = 45000$ (thỏa mãn điều kiện)

Giá bìa của cuốn sách đắt hơn là: $45000 + 15000 = 60000$ (đồng)

Vậy giá bìa của hai cuốn sách là 45000 đồng và 60000 đồng.

Bài 13. Cuối tuần vừa rồi, gia đình bạn Trang gồm bốn người đi ăn buffet lẩu tại một nhà hàng. Nhà hàng này đang thực hiện chương trình giảm giá "Đi bốn tính tiền ba", nghĩa là nếu có 4 người khách cùng đặt một bàn ăn thì chỉ tính tiền 3 khách. Ngoài ra, mẹ Trang còn có thẻ thành viên nên được giảm giá thêm 5% trên tổng hóa đơn. Do đó, số tiền thanh toán cho bữa ăn của gia đình Trang là 826 500 đồng. Hỏi giá tiền ăn buffet cho một người là bao nhiêu?

Gợi ý

Gọi giá tiền ăn buffet cho một người là x (đồng) ($x > 0$)

Thực tế, gia đình Trang chỉ phải thanh toán tiền của 3 người với số tiền là $3x$ (đồng)

Vì được giảm giá 5% nên thực tế số tiền phải trả bằng 95% giá tiền gốc. Ta có phương trình: $95\%.3x = 826500$

Giải phương trình được $x = 290000$ (đồng)

Vậy giá tiền ăn buffet cho một người là 290000 đồng.

Bài 14. Trong quý I, hai tổ công nhân sản xuất được 1550 sản phẩm. Sang quý II, tổ Một sản xuất vượt mức 15%, tổ Hai vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 1815 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ sản xuất được trong quý I.

Gợi ý

Gọi số sản phẩm tổ I sản xuất trong tháng đầu là x (chiếc) ($x \in \mathbb{N}^*; x < 1550$)

	Tổ I (sản phẩm)	Tổ II (sản phẩm)	Cả hai tổ (sản phẩm)
Quý I	x	$1550 - x$	1550
Quý II	$x + x.15\%$	$1550 - x + (1550 - x).20\%$	1815

Do đó ta có phương trình:

$$x + x.15\% + 1550 - x + (1550 - x).20\% = 1815$$

Giải phương trình này được $x = 900$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số sản phẩm tổ I và tổ II sản xuất trong tháng đầu lần lượt là: 900 và 650 (chiếc)

Bài 15. Tại một xưởng làm bánh, trong tuần thứ nhất, hai tổ sản xuất được 900 thùng bánh. Sang tuần thứ hai, tổ I làm vượt mức 25%, nhưng tổ II chỉ đạt 95% nên cả hai tổ sản xuất 975 thùng bánh. Hỏi trong tuần thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu thùng bánh?

Gợi ý

Đáp án: Tuần thứ nhất: 400 thùng bánh; Tuần thứ hai: 500 thùng bánh.

DẠNG 5. ƯỚC LƯỢNG MỘT XÁC SUẤT BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM.

Bài 16. Một túi đựng các quả cầu có kích cỡ giống nhau, khác nhau về màu, trong đó có 25 quả màu đỏ, 40 quả màu tím, 12 quả màu vàng, 10 quả màu trắng và 15 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong túi. Tính xác suất để:

- Lấy được quả màu đỏ;
- Lấy được quả màu tím hoặc vàng;
- Lấy được quả không phải màu đen.

Gợi ý

Tổng số quả cầu là: $25 + 40 + 12 + 10 + 15 = 102$ (quả)

- Xác suất để lấy được quả màu đỏ là: $\frac{25}{102} \cdot 100\% \approx 24,51\%$.
- Xác suất để lấy được quả màu tím hoặc vàng là: $\frac{40 + 12}{102} \cdot 100\% \approx 50,98\%$
- Xác suất lấy được quả không phải màu đen là: $\frac{102 - 15}{102} \cdot 100\% \approx 85,29\%$

Bài 17. Trong một nhóm đi cắm trại có 16 học sinh lớp 8A (10 nam, 6 nữ) và 14 học sinh lớp 8B (7 nam, 7 nữ). Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất của các biến cố sau:

- A: "Chọn được học sinh nữ";
- B: "Chọn được học sinh nam lớp 8A";
- C: "Chọn được học sinh nữ lớp 8B".

Gợi ý

$$a) P(A) = \frac{6 + 7}{30} = \frac{13}{30}. \quad b) P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}. \quad c) P(C) = \frac{7}{30}.$$

Bài 18. Chọn một số có hai chữ số, tính xác suất của các biến cố sau:

- Số được chọn chứa chữ số 5 ;
- Số được chọn có hai chữ số giống nhau;

- c) Số được chọn lớn hơn 70;
d) Số được chọn không chứa chữ số 3.

Gợi ý

Có 90 số có hai chữ số (từ 11 đến 99).

- a) Các số chứa chữ số 5 có dạng:

$$\overline{5x} (x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 9) \text{ hoặc } \overline{x5} (x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9).$$

Có tất cả 18 số dạng trên (chú ý là số 55 được tính hai lần).

Suy ra, xác suất số được chọn chứa chữ số 5 là: $\frac{18}{90} = 0,2$.

- b) Các số có hai chữ số giống nhau có dạng: $\overline{xx} (x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9)$.

Có tất cả 9 số như vậy.

Suy ra xác suất số được chọn có hai chữ số giống nhau là: $\frac{9}{90} = 0,1$.

- c) Các số có hai chữ số lớn hơn 70 là: 71, 72, ..., 99.

Số các số có hai chữ số lớn hơn 70 là: $(99 - 71) + 1 = 29$ (số).

Suy ra, xác suất số được chọn lớn hơn 70 là: $\frac{29}{90}$.

d) Làm tương tự như tính xác suất số được chọn chứa chữ số 5 thì xác suất số được chọn chứa chữ số 3 là: $\frac{18}{90} = 0,2$.

Suy ra, xác suất số được chọn không chứa chữ số 3 là $1 - 0,2 = 0,8$.

Bài 19. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc, tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc từ 10 trở lên;
b) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc chia hết cho 3;
c) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là một số nguyên tố;
d) Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc lớn hơn 4.

Gợi ý

- a) Lập bảng tính tổng kết quả số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8

3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc từ 10 trở lên là: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) HS tự lập bảng như câu a) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc chia hết cho 3 (tổng bằng các số 3, 6, 9, 12) là: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

c) Lập bảng tính tổng kết quả số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc:

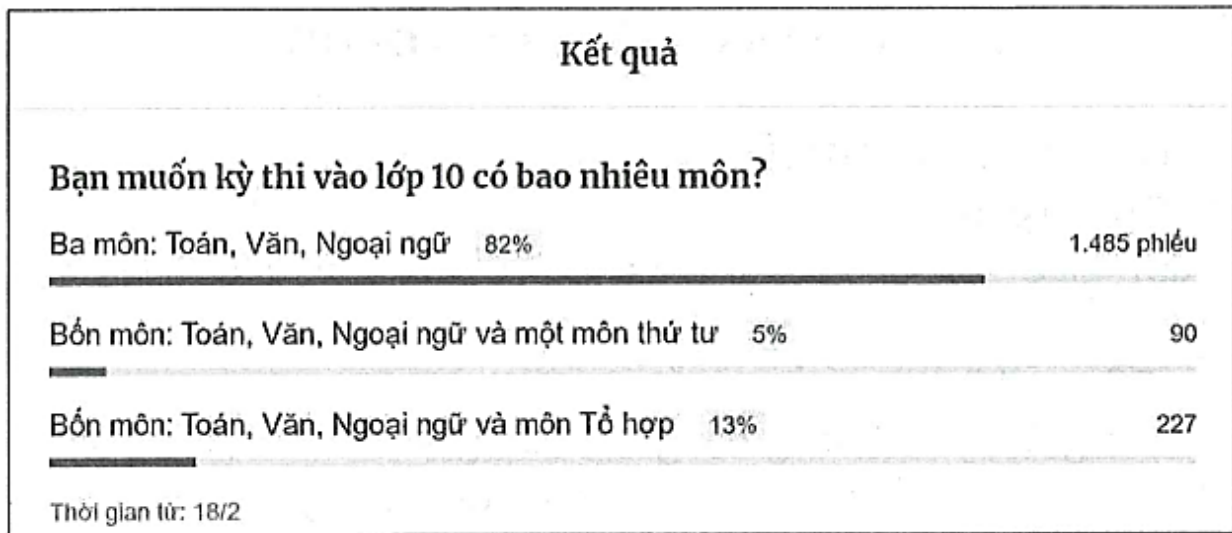
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là một số nguyên tố (tổng bằng 2, 3, 5, 7 hoặc 11) là: $15:30 = 0,5$.

d) Các kết quả thuận lợi cho biến cố "Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc lớn hơn 4" là (6,1) và (1,6), có 2 kết quả.

Vậy, xác suất của biến cố "Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc lớn hơn 4" là $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

Bài 20. Liên quan đến kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 tại thành phố Hà Nội, Vnexpress.net đã lấy ý kiến độc giả và thu được kết quả như sau:



a) Tính xác suất biến cố người cho ý kiến thi 4 môn.

b) Theo thống kê của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, tính đến học kỳ II năm học 2021-2022, toàn thành phố có 659 trường trung học cơ sở với hơn 522.000 học sinh. Hãy ước tính số học sinh cho ý kiến thi 3 môn trong đợt thi tuyển sinh vào 10 dựa vào tỉ lệ trên.

Gợi ý

a) Xác suất biến cố người cho ý kiến thi 4 môn là:

$$\frac{227 + 90}{1485 + 90 + 227} \cdot 100\% = 17,59\%.$$

b) Xác suất biến cố người cho ý kiến thi 3 môn là:

$$100\% - 17,59\% = 82,41\%.$$

Ước tính số học sinh cho ý kiến thi 3 môn là:

$$522000 \cdot 82,41\% \approx 430180 \text{ (học sinh)}.$$

Bài 21. Thống kê số vụ tai nạn giao thông của tháng 9 của một thành phố A thu được kết quả như bảng sau:

Số vụ tai nạn giao thông trong 1 ngày	0	1	2	3	4	> 4
Số ngày	4	7	9	6	2	2

a) Tính xác suất biến cố một ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn.

b) Tính xác suất một ngày có nhiều hơn 3 vụ tai nạn.

c) Hãy dự đoán xem trong 3 tháng 10, 11, 12 tại thành phố A:

- Có bao nhiêu ngày có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông?

- Có bao nhiêu ngày không xảy ra tai nạn giao thông?

Gợi ý

Tổng số vụ tai nạn xảy ra trong tháng là 30 vụ.

a) Xác suất biến cố một ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn là: $\frac{4+7+9}{30} = \frac{2}{3}$.

b) Xác suất một ngày có nhiều hơn 3 vụ tai nạn là: $\frac{2+2}{30} = \frac{2}{15}$.

c) Dự đoán trong 3 tháng 10, 11, 12 (khoảng 92 ngày) tại thành phố A:

- Xác suất biến cố một ngày có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông là: $\frac{4+7+9+6}{30} = \frac{13}{15}$.

Ước tính số ngày có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông là khoảng: $92 \cdot \frac{13}{15} \approx 80$ (ngày).

- Xác suất của biến cố một ngày không xảy ra tai nạn giao thông là: $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

Ước tính số ngày không xảy ra tai nạn giao thông là: $92 \cdot \frac{2}{15} \approx 12$ (ngày).

DẠNG 6. HÌNH HỌC TỔNG HỢP.

Bài 22. Cho tam giác nhọn ABC . Kẻ các đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $AE.AC = AF.AB$ và $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M , AH cắt BC tại D .

Chứng minh $BD^2 = AD.DM$.

c) Cho $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và kẻ AK vuông góc với EF tại K . Tính tỉ số $\frac{S_{AFH}}{S_{AKE}}$.

d) Chứng minh $AB.AC = BE.CF + AE.AF$.

Gợi ý

a) $\triangle AEB \sim \triangle AFC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$.

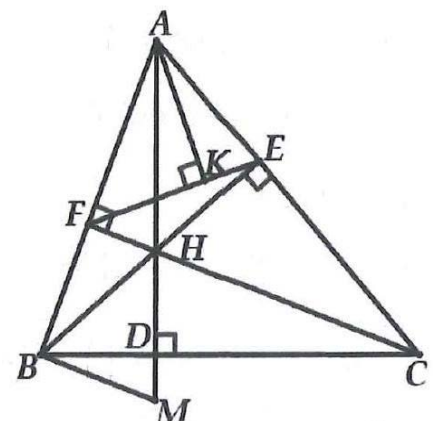
Từ đó chứng minh được $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$.

b) Chứng minh được $\triangle ADB \sim \triangle BDM (g.g)$.

Từ đó chứng minh được $BD^2 = AD.DM$

c) $\widehat{FHA} = \widehat{KEA} = (\widehat{ABC})$

$\Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle AKE (g.g)$



$$\Rightarrow \frac{S_{AFH}}{S_{AKE}} = \left(\frac{AH}{AE} \right)^2.$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EAH} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AEH \text{ vuông cân tại } E \Rightarrow AE = HE \Rightarrow AH^2 = AE^2 + HE^2 = 2AE^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{AFH}}{S_{AKE}} = 2.$$

$$\text{d) Ta có } \triangle AEB \sim \triangle HEC (g.g), \text{ suy ra } AE = AB \cdot \frac{HE}{HC}, BE = AB \cdot \frac{CE}{HC}$$

$$\text{Chứng minh tương tự } AF = AC \cdot \frac{HF}{HB}; CF = AC \cdot \frac{BF}{BH};$$

$$AE \cdot AF = AB \cdot AC \cdot \frac{HE^2}{HC^2}; BE \cdot CF = AB \cdot AC \cdot \frac{CE^2}{HC^2}.$$

$$\Rightarrow AE \cdot AF + BE \cdot CF = AB \cdot AC \cdot \left(\frac{HE^2 + CE^2}{HC^2} \right) = AB \cdot AC$$

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 12 cm. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = 3$ cm. Đường thẳng DE cắt CB kéo dài tại K .

- Tính DE .
- Chứng minh $\triangle EAD \sim \triangle EBK$; từ đó tính DK .
- Chứng minh $AD^2 = KC \cdot AE$.
- Tính diện tích tam giác CDK .

Gợi ý

a) Vì $AB = 12$ cm, $BE = 3$ cm nên $AE = 9$ cm.

Từ đó dễ dàng tính được

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (cm)}$$

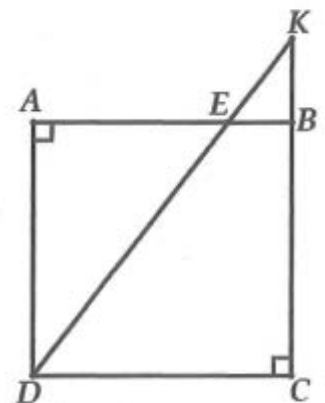
b) Dễ dàng chứng minh được

$\triangle EAD \sim \triangle EBK$ (g.g) theo tỉ số

$$\frac{AE}{EB} = \frac{9}{3} = 3. \text{ Suy ra}$$

$$\frac{DE}{EK} = 3 \Rightarrow EK = 5 \text{ (cm)} \Rightarrow DK = 20 \text{ (cm)}$$

c) Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle CKD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{CK} = \frac{AE}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CK} = \frac{AE}{AD}$



Từ đó suy ra $AD^2 = CK.AE$.

d) Ta có $S_{AED} = \frac{1}{2}.AE.AD = 54(\text{cm}^2)$.

Mà $\triangle ADE \sim \triangle CKD$ theo tỉ số $\frac{AE}{CD} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Do vậy $\frac{S_{ADE}}{S_{CKD}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{54}{S_{CKD}} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{CKD} = 96(\text{cm}^2)$.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

Gọi M và N theo thứ tự là hình chiếu của E và D trên BC .

a) Chứng minh tỉ số khoảng cách từ H đến EM và DN bằng $\frac{EM}{DN}$.

b) Gọi O là giao điểm của DM và EN . Chứng minh HO vuông góc với BC .

Gợi ý

a) Kẻ HI, HK lần lượt vuông góc với EM và DN .

Xét $\triangle KHD$ và $\triangle NDC$ có:

$$\widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ,$$

$$\widehat{KHD} = \widehat{NDC} \text{ (cùng phụ } \widehat{HDK} \text{)}$$

Suy ra $\triangle KHD \sim \triangle NDC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HK}{DN} = \frac{HD}{DC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{HI}{EM} = \frac{HE}{EB} \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có } \triangle HBE \sim \triangle HCD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HE}{EB} = \frac{HD}{DC} \quad (3)$$

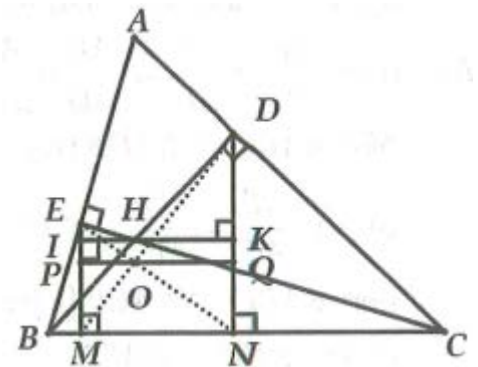
$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \frac{HI}{EM} = \frac{HK}{DN} \Rightarrow \frac{HI}{HK} = \frac{EM}{DN} \quad (4).$$

b) Kẻ OP, OQ lần lượt vuông góc với EM và DN .

Dễ dàng chứng minh được $\triangle OEM \sim \triangle OND$ (g.g) có OP, OQ là hai đường cao tương ứng

$$\text{nên } \frac{OP}{OQ} = \frac{EM}{DN} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{HI}{HK} = \frac{OP}{OQ} \Rightarrow HO \parallel EM, \text{ mà } EM \perp BC \Rightarrow HO \perp BC.$$



Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc cạnh BC).

a) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D , vẽ AE vuông góc với BD tại E . Chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle DAB$.

b) Chứng minh $BE \cdot BD = BH \cdot BC$.

c) Chứng minh $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.

Gợi ý

a) Ta có $\widehat{DBA} = \widehat{ABE}$, $\widehat{AEB} = \widehat{DAB} = 90^\circ$ nên $\triangle AEB \sim \triangle DAB$.

b) Vì $\triangle AEB \sim \triangle DAB \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow BE \cdot BD = BA^2$ (1)

Xét tam giác BAH và tam giác BCA có:

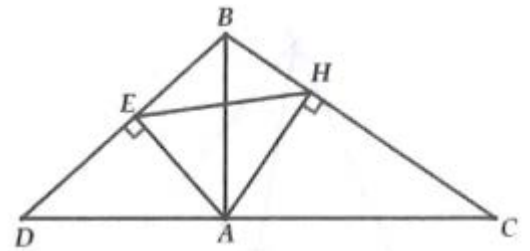
$$\widehat{ABH} = \widehat{CBA}, \widehat{BHA} = \widehat{BCA} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle BAH \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC}$

$$\Rightarrow BH \cdot BC = BA^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE \cdot BD = BH \cdot BC$

c) Vì $BE \cdot BD = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BD}$, lại có \hat{B} chung nên $\triangle BEH \sim \triangle BCD \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.



Bài 26. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và D sao cho

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$$

a) Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

b) Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle ABC$;

c) Gọi I là giao điểm của BD và EC . Chứng minh $ID \cdot IB = IE \cdot IC$.

Gợi ý

a) Vì $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$, lại có \hat{A} chung nên $\triangle AEC \sim \triangle ADB$

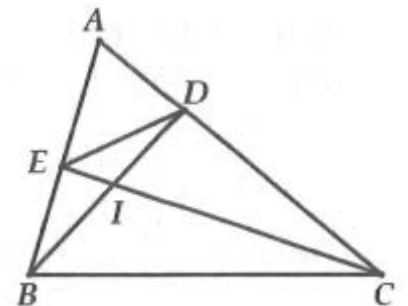
(c.g.c).

b) Vì $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, lại có \hat{A} chung nên $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (c.g.c).

c) Vì $\triangle AEC \sim \triangle ADB$

$$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABD}, \text{ lại có } \widehat{EIB} = \widehat{DIC} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

Suy ra $\triangle EIB \sim \triangle DIC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IB}{IC} \Rightarrow IE \cdot IC = IB \cdot ID$

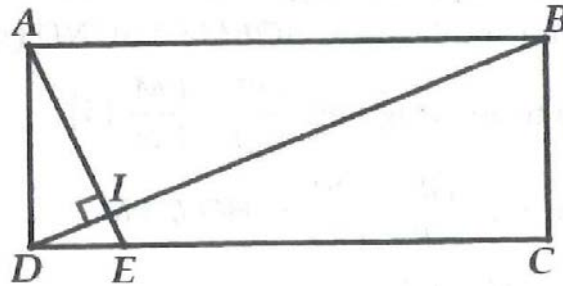


Bài 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Kẻ AI vuông góc với BD tại I và AI cắt DC tại E . Chứng minh:

a) $AD^2 = DI \cdot DB$; b) $BI = 4DI$;

Gợi ý

a) Xét $\triangle ADI$ và $\triangle BDA$ có:



$$\widehat{AID} = \widehat{BAD} = 90^\circ, \widehat{ABD} = \widehat{DAI} \text{ (cùng phụ với } \widehat{IAB} \text{)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AID \sim \triangle BAD (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DI}{AD} \Rightarrow AD^2 = DI \cdot DB$$

b) Xét $\triangle AID$ và $\triangle BIA$ có: $\widehat{AID} = \widehat{BIA} = 90^\circ, \widehat{DAI} = \widehat{ABI}$ (cùng phụ với \widehat{IAB}). Do đó $\triangle AID \sim \triangle BIA (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DI}{IA} = \frac{AI}{BI} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} BI = 2IA \\ DI = \frac{1}{2} IA \end{cases} \Rightarrow BI = 4DI$$

Bài 28. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AE và DE .

Chứng minh rằng:

a) $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{DE}$; b) $\triangle AND \sim \triangle DPC$;

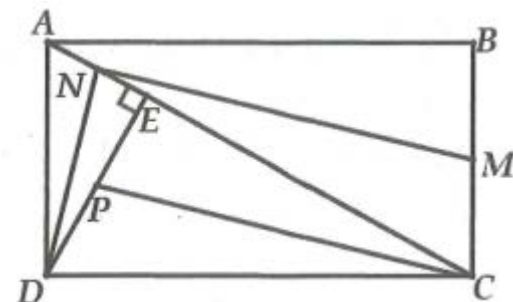
Gợi ý

a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle DCE$ có:

$$\widehat{AED} = \widehat{DEC} = 90^\circ,$$

$$\widehat{ADE} = \widehat{DCE} \text{ (cùng phụ } \widehat{EDC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle DCE$$



$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{DE}.$$

$$\text{b) Vì } \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{DE} \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\frac{1}{2}AE}{\frac{1}{2}DE} = \frac{AN}{DP}$$

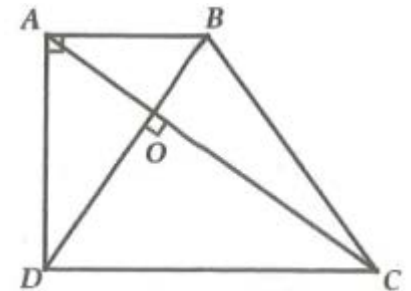
Lại có $\widehat{NAD} = \widehat{PDC}$ (cùng phụ với \widehat{ACD}) suy ra $\triangle ADN \sim \triangle DCP$.

Bài 29. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có hai đường chéo vuông góc với nhau tại O và $AB = 4 \text{ cm}$, $CD = 9 \text{ cm}$.

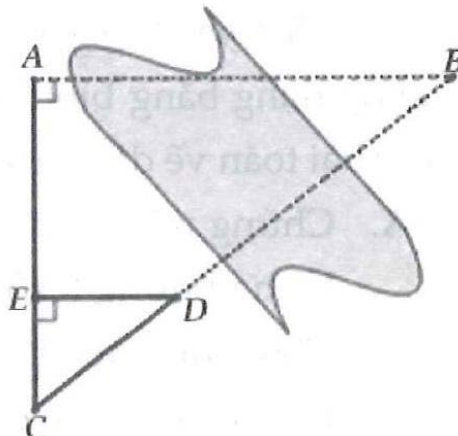
- Chứng minh $\triangle AOB \sim \triangle DAB$;
- Tính độ dài AD ;
- Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$
- Tính tỉ số $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}$.

Gợi ý

- HS tự chứng minh.
- Chứng minh được $AD^2 = AB \cdot DC \Rightarrow AD = 6 \text{ (cm)}$.
- Chứng minh $\triangle ABO \sim \triangle CDO$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh. (HS tự làm).
- Ta chứng minh $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$.



Bài 40. Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B (không thể đo trực tiếp), người ta xác định các điểm C, D, E như hình vẽ. Sau đó đo được khoảng cách giữa A và C là $AC = 9 \text{ m}$, khoảng cách giữa C và E là $EC = 3 \text{ m}$; khoảng cách giữa E và D là $DE = 4 \text{ m}$. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .



Gợi ý

Xét $\triangle CED$ vuông tại E và $\triangle CAB$ vuông tại A , có \hat{C} chung nên $\triangle CED \sim \triangle CAB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{ED}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{ED \cdot CA}{CE} = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12 \text{ (m)}$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm A và B là $12m$.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO

Câu 1. Rút gọn biểu thức: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2012}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2012}} \Rightarrow 2A = 2 + 1 + \dots + \frac{1}{2^{2011}}$$

$$2A - A = 2 - \frac{1}{2^{2012}} \Rightarrow A = \frac{2^{2013} - 1}{2^{2012}}$$

Câu 2. So sánh: $A = \frac{20^{10} + 1}{20^{10} - 1}$ và $B = \frac{20^{10} - 1}{20^{10} - 3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{20^{10} + 1}{20^{10} - 1} = \frac{20^{10} - 1 + 2}{20^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{20^{10} - 1}$$

$$B = \frac{20^{10} - 1}{20^{10} - 3} = \frac{20^{10} - 3 + 2}{20^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{20^{10} - 3}$$

$$\text{Do } \frac{2}{20^{10} - 1} < \frac{2}{20^{10} - 3} \text{ Suy ra } A < B$$

Câu 3. Cho $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{19}$. Hãy chứng tỏ rằng $B > 1$.

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots; \frac{1}{19}$ có 16 phân số

$$\text{Vì } \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots > \frac{1}{11} \text{ và } \frac{1}{10} > \frac{1}{11} > \dots > \frac{1}{19} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } B = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{19} = \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} \right) >$$

$$\underbrace{\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}}_{8 \text{ số}} + \underbrace{\frac{1}{19} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{19}}_{8 \text{ số}} > \underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}}_{8 \text{ số}} + \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}}_{8 \text{ số}}$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{8}{20} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20} > 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra: $B > 1$

Câu 4. Cho $S = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{40.43} + \frac{3}{43.46}$. Hãy chứng tỏ rằng $S < 1$.

Lời giải

Ta có:

$$S = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{40.43} + \frac{3}{43.46} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{43} - \frac{1}{46}\right) = 1 - \frac{1}{46} < 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 5. Chứng tỏ rằng: $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} < 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \frac{1}{5^2} < \frac{1}{4.5}; \frac{1}{6^2} < \frac{1}{5.6}; \frac{1}{7^2} < \frac{1}{6.6}; \frac{1}{8^2} < \frac{1}{7.8}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 6. Cho $A = \frac{6n-3}{3n+1}$. Tìm giá trị của n để

a) A là một phân số.

b) A là một số nguyên.

Lời giải

a) Giả sử $6n-3$ và $3n+1$ chia hết cho số nguyên d thì

$$2(3n+1) - (6n-3) : d \Rightarrow 5 : d \Rightarrow d \in \{1; 5\}$$

Nếu phân số $A = \frac{6n-3}{3n+1}$ rút gọn được thì tử và mẫu phải chia hết cho 5.

$$\text{Ta có } 6n-3 : 5 \Leftrightarrow 3(2n-1) : 5 \Leftrightarrow 2n-1 : 5$$

$$\Leftrightarrow 2n-1+5 : 5 \Rightarrow 2(n+2) : 5 \Rightarrow n+2 : 5 \Rightarrow n = 5k+3 (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Khi đó } 3n+1 = 15k+10 : 5.$$

Do đó với $n = 5k+3 (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{2n+3}{3n+7}$ là phân số tối giản.

$$\text{b) Ta có: } A = \frac{6n-3}{3n+1} = \frac{2(3n+1)-5}{3n+1} = 2 - \frac{5}{3n+1}$$

Để A là số nguyên thì $5 : 3n+1 \Rightarrow 3n+1 \in \{-5; -1; 1; 5\}$ và n nguyên $\Rightarrow n \in \{-2; 0; 2\}$

Câu 7. Chứng minh phân số $\frac{n+1}{2n+3}; \frac{2m+3}{m+1}$ tối giản.

Lời giải

1) Chứng minh phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ tối giản.

Giả sử $n+1$ và $2n+3$ cùng chia hết cho số nguyên dương d .

Ta có $n+1:d$ và $2n+3:d$ nên

$$(2n+3) - 2(n+1):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d \in \{1\}.$$

Vậy phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ là phân số tối giản.

2) Chứng minh phân số $\frac{2m+3}{m+1}$ tối giản.

Giả sử $m+1$ và $2m+3$ cùng chia hết cho số nguyên dương d .

Ta có $m+1:d$ và $2m+3:d$ nên

$$(2m+3) - 2(m+1):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d \in \{1\}.$$

Vậy phân số $\frac{2m+3}{m+1}$ là phân số tối giản.

DẠNG 7. MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO

Bài 40. Giải phương trình: Giải phương trình : $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 8x + 32} = \frac{1}{x^2 - 2x + 8}$

Gợi ý

Điều kiện xác định: $x \neq 0$

$$\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 8x + 32} = \frac{1}{x^2 - 2x + 8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \frac{8}{x} + \frac{32}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{1 - 8\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}$$

Đặt $\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} = a$, phương trình trở thành:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{1-8a} = \frac{1}{1-2a} \Leftrightarrow \frac{(1-8a)(1-2a)}{3(1-8a)(1-2a)} + \frac{3(1-2a)}{3(1-8a)(1-2a)} = \frac{3(1-8a)}{3(1-8a)(1-2a)}$$

$$\Rightarrow 1-2a-8a+16a^2+3-6a=3-24a$$

$$\Rightarrow 16a^2-16a+4-3+24a=0$$

$$\Leftrightarrow 16a^2+8a+1=0$$

$$\Leftrightarrow (4a+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{4x^2} - \frac{16}{4x^2} = -\frac{x^2}{4x^2}$$

$$\Rightarrow 4x - 16 = -x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 20$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \sqrt{20} \\ x+2 = -\sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{20} \\ x = -2 - \sqrt{20} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2 + \sqrt{20}; -2 - \sqrt{20}\}$.

Bài 41. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải

Xét biểu thức :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &= \left(\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \right) - 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c^2} \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a^2} \cdot \frac{1}{c}} - 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)} \\ &\geq 2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) - 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 0 \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &\geq 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \right) &\geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

$$\text{Vậy } \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \right) \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 42. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \\
\Leftrightarrow & 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
\Leftrightarrow & 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \\
\Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \\
\Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}.$$

Bài 44. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{27-12x}{x^2+9}$.

Lời giải

Ta có A luôn xác định với mọi giá trị của x .

$$A = \frac{27-12x}{x^2+9} = \frac{(x^2-12x+36)-(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{(x-6)^2}{x^2+9} - 1.$$

Suy ra $A \geq -1$, dấu "=" xảy ra khi $x = 6$. Do đó giá trị nhỏ nhất của A bằng -1 , khi $x = 6$.

$$\text{Mặt khác } A = \frac{27-12x}{x^2+9} = \frac{4(x^2+9)-(4x^2+12x+9)}{x^2+9} = 4 - \frac{(2x+3)^2}{x^2+9} \leq 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$. Do đó giá trị lớn nhất của A bằng 4 , khi $x = \frac{3}{2}$.

Bài 45. Cho hai số $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Lời giải

Với mọi số $x, y > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 2 \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right) \left(2y + \frac{1}{y}\right) \\
2 \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{y}\right)^2 &\geq \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{y}\right)^2 + 2 \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right) \left(2y + \frac{1}{y}\right)
\end{aligned}$$

$$2P \geq \left[\left(2x + \frac{1}{x} \right) + \left(2y + \frac{1}{y} \right) \right]^2$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{\left[\left(2x + \frac{1}{x} \right) + \left(2y + \frac{1}{y} \right) \right]^2}{2} \quad (*)$$

* Ta có:

$$\left(2x + \frac{1}{x} \right) + \left(2y + \frac{1}{y} \right) = 2(x+y) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Mặt khác

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$

$$\text{Nên } \left(2x + \frac{1}{x} \right) + \left(2y + \frac{1}{y} \right) \geq 6$$

$$\text{Thay vào } (*) \quad P \geq \frac{6^2}{2} \Leftrightarrow P \geq 18$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 18 khi $x = y = \frac{1}{2}$.